Απ 1

No. Date 18/12/2018

Άσκηση: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής με $\lim_{x \to \pm\infty} f = 0$ λαμβάνεται ή το ολικό μέγιστο ή το ολικό ελάχιστο

• $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $f(x) = e^{-x^2}$

$f(0) = 1$ $f(x) \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\Big\} \Rightarrow$ Η f λαμβάνει το ολικό της μέγιστο στο 0.

Άρα $\inf f = \inf f(\mathbb{R}) = 0$

• Επειδή f συνεχής το πεδίο ορισμού της είναι διάστημα και το πεδίο τιμών της.

ⓘ A κλειστό σύνολο $\Leftrightarrow \forall (x_n) \in A$ με $x_n \to y$

ⓘ $A \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένο $\exists M$ τ.ω. $|x| \leq M$ $\forall x \in A$

• $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ αφού $\mathbb{R}$ διάστημα και f συνεχής $\rightarrow$ $f(\mathbb{R})$ διάστημα

• Ισχύει $f(\mathbb{R})$ φραγμένο διάστημα

Ισχύει $0 \leq f(x) \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Θ.δ.ο. $\inf f(\mathbb{R}) = 0$

Το 0 είναι κάτω φράγμα για το σύνολο $f(\mathbb{R})$

Αρκεί να δείξουμε ότι το 0 είναι το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του $f(I)$

Θ.δ.ο. το 0 είναι το μεγαλύτερο κάτω φράγμα, Αν όχι θα $\exists \theta > 0$ τ.ω. $f(x) \geq \theta$, $\forall x \in \mathbb{R}$

• Παίρνουμε $x \to +\infty$ $\rightsquigarrow \lim_{x \to +\infty} f \geq \theta$, $\forall x \in \mathbb{R}$

No. Date

$O \geq \theta > 0$ __άτοπο__

∇ __Να συνεχιστεί__

$*$ Έστω ότι $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0)>0$. Θα δείξουμε ότι το ολικό μέγιστο της f λαμβάνεται

ϵ-δ: Επειδή $\lim_{x\to\pm\infty} f = 0 \Rightarrow \exists\, L>0$ τ.ω. $|f(x)| < \frac{f(x_0)}{2}$ $(*)$ $\forall x$ με $|x|>L$

με $\epsilon = \frac{f(x_0)}{2}$. (Υποθ. $L > |x_0|$)

Το διάστημα $[-L,L]$ είναι κλειστό και φραγμένο άρα η f λαμβάνει ολικό μέγιστο στο $[-L,L]$

Χρησιμοποιώ ότι είναι συνεχής.

Δηλαδή $\exists\, y_0 \in [-L,L]$ τ.ω. $f(x) \leq f(y_0)$ $\forall x \in [-L,L]$

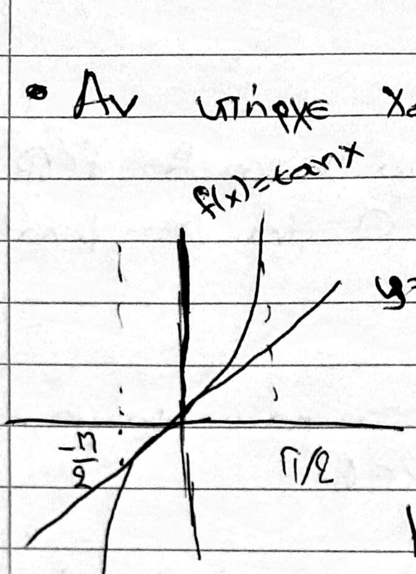
Ισχυρισμός: ισχύει $f(x) \leq f(y_0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (1)

Έχουμε $x_0 \in [-L,L] \overset{(1)}{\rightsquigarrow} f(x_0) \leq f(y_0)$

Αν $|x| \geq L \overset{(*)}{\rightsquigarrow} |f(x)| < \frac{f(x_0)}{2} \leq \frac{f(y_0)}{2} < f(y_0)$ (2)

Από (1) κ (2) $\rightsquigarrow f(x) \leq f(y_0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ → y_0 σημείο ολικού μέγιστου στο $\mathbb{R}$

• Αν υπήρχε $x_0 \in \mathbb{R}$ $f(x_0)<0$ τότε η f λαμβάνει ολικό ελάχιστο με ανάλογο τρόπο.



$f(x) = \tan x$ $\quad A = (-\pi/2, \pi/2)$

Η f ↑ διότι δδ.α. $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

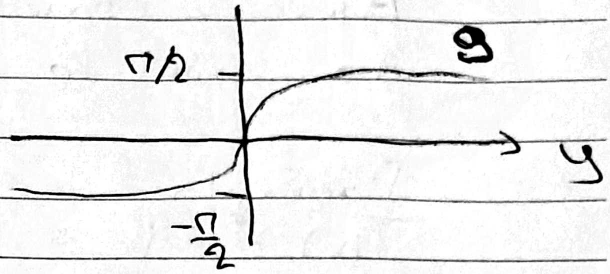
Η $y=x$ είναι εφαπτόμενη στην αρχή των αξόνων.

$f(A) = f\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \mathbb{R}$ επειδή η f είναι συνεχής και το A είναι διάστημα ξέρω ότι το f(A) θα είναι διάστημα και ισχύει $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f = +\infty$ $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f = -\infty$
άρα $f(A) = \mathbb{R}$

$(g: f(A) \to \mathbb{R})$ Άρα $\exists$ αντίστροφος $g: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(Επειδή f $\uparrow$ αντιστρέφεται)

Η συνάρτηση g είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$ όμως δεν λαμβάνει ούτε ολικό μέγιστο ούτε ελάχιστο.

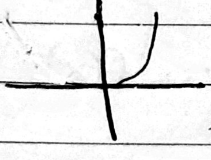


Παράγωγος

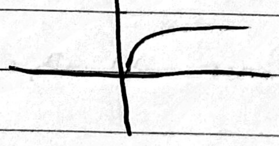
• Αντίστροφες συναρτήσεις

Εαν f συνεχής και γν. μονότονη στο I (διάστημα), τότε έχει αντίστροφο $g = f^{-1}$ στο $J = f(I)$ (J διάστημα και $g \in C(J)$)

Επειδή f συνεχής $\to$ f(I) είναι διάστημα



$f = x^2$
$I = [0, +\infty)$
$f'(0) \exists = 0$



$g = \sqrt{y}$ $J = [0, \infty)$
$g'(0) \nexists$

Ισχύει $g(f(x)) = x$, $\forall x \in I$

Εαν $c \in I$ και $d = f(c)$ και αν ξέρουμε ότι $f'(c)$ και $g'(d)$ $\exists$.

$\Rightarrow g'(f(c)) \cdot f'(c) = 1$.

$\rightsquigarrow f'(c) = \dfrac{1}{g'(d)}$

Ισχύει $\boxed{f(g(y)) = y \ \forall y \in I}$

No. Date

• **Θεώρημα**: Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και έστω $f: I \to \mathbb{R}$ γν. μονότονη και συνεχής στο I. Έστω $J = f(I)$ και $g: J \to \mathbb{R}$ η γν. μονότονη και συνεχής αντίστροφη της f. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο c και $f'(c) \neq 0$ τότε η g είναι διαφορίσιμη στο $d = f(c)$ και ισχύει
$$g'(d) = \frac{1}{f'(c)} = \frac{1}{f'(g(d))}$$

Αφού η εφαπτόμενη $\exists$ και δεν κάθετη. Το ίδιο θα ισχύει και για την g στο σημείο x $f(c)$

Παράδειγμα

$f(x) = x^5 + 4x + 3$, $x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $\uparrow$ (αφού είναι το άθροισμα δύο γνησίως αύξουσων συναρτήσεων)

Επίσης $\lim\limits_{x \to -\infty} f = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f = +\infty \Rightarrow f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Έστω $g: \underset{f(\mathbb{R})}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{R}}} \to \mathbb{R}$, η αντίστροφος συνάρτηση της f

δηλαδή $g(y) = f^{-1}(y)$ $\forall y \in \mathbb{R}$

Επειδή $f'(x) = 5x^4 + 4 \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \overset{*}{\Rightarrow}$ Η g παραγ. $\forall y \in \mathbb{R}$

* Από θεωρ. η g είναι παραγωγίσιμη στο $f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Έστω $c = 1$: $f(1) = 8$ και $f'(1) = 9$

$\rightsquigarrow$ $g'(f(1)) = \frac{1}{f(1)}$

$\rightsquigarrow$ $g'(8) = \frac{1}{9}$

Ορισμός: $f: I \to \mathbb{R}$ έχει σχετικό (τοπικό) μέγιστο (ή ελάχιστο) στο $c \in I$ αν και μόνο αν $\exists$ γειτονιά $V_\delta(c) = (c-\delta, c+\delta)$ του

Τ.ω. $f(x)\le f(c)$, $(f(x)\ge f(c))$ $\forall x\in V_\delta(c)\cap I$

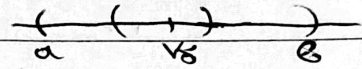
Λέμε ότι η f έχει σχετικό ακρότατο στο $c\in I$ αν έχει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο στο c

<u>Θεώρημα Εσωτερ. Ακρ.</u>: Έστω c εσωτερικό σημείο του I και $f: I\to\mathbb{R}$ έχει σχετικό ακρότατο στο c εάν η παράγωγος της f στο c $\exists$, τότε $f'(c)=0$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ότι η f έχει σχετικό μέγιστο στο c (αν f έχει ελάχιστο όμοια)

Ας υποθέσουμε ότι $f'(c)>0$ Αφού $\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(c)>0$

$\exists$ γειτονία $V_\delta(c)\subseteq I$ του c 

Τ.ω. $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}>0$ $\forall x\in V_\delta(c)$, $x\ne c$

Άρα αν $x\in V_\delta(c)$ με $x>c$ $f(x)-f(c)=(x-c)\frac{f(x)-f(c)}{x-c}>0$ (1)

Όμως αφού στο c η f έχει σχετικό μέγιστο
$\rightsquigarrow f(x)\le f(c)$, $\forall x\in V_{\delta'}(c)\subseteq I$ (2)

Έστω $d=\min(\delta,\delta')$

Η (1) είναι ασυμβίβαστη από την (2) για $x\in V_d(c)$ με $x>c$
άτοπο

Άρα $f'(c)\le 0$

Ανάλογα δείχνουμε $f'(c)\ge 0$. Συνεπώς $f'(c)=0$.